Geometrie mit Taxis

Während seiner Schulzeit lernt man in der Regel nur die klassische, euklidische Geometrie kennen. In der Unter- und Mittelstufe werden dabei verschiedene geometrische Zusammenhänge, wie Symmetrien, Abstände von Punkten, Streckenmittelpunkte, die Kreiszahl π, geometrische Figuren, Umfangs-, Flächen- und Volumenformeln, und vieles mehr entdeckt. Auch die analytische Geometrie in der Oberstufe ist nur eine andere Darstellungsart für die bekannte euklidische Geometrie.

Neben dieser Schulgeometrie gibt es aber weitere sogenannte nicht-euklidische Geometrien, die jedoch oft komplex, schwierig zu verstehen und wenig anschaulich sind. Die Artikelreihe Geometrie mit Taxis befasst sich mit einer einfach zu verstehenden und anschaulichen, nicht-euklidischen Geometrie. In der Fachliteratur findet man sie unter verschiedenen Namen, wie Minkowski-, Taxi- oder Manhattengeometrie. Der aus Russland stammende Mathematiker Hermann Minkowski soll sich als erstes mit dieser besonderen Geometrie beschäftigt haben, weshalb er auch meist als ihr Erfinder genannt wird. Minkowski unterrichtete unter anderem in Zürich den jungen Albert Einstein und arbeitete später in Göttingen mit dem bedeutenden Mathematiker David Hilbert zusammen. Dort starb Hermann Minkowski im Jahr 1909, mit nur 45 Jahren, an einer Blinddarmentzündung. Auf Hermann Minkowski gehen die in der Relativitätstheorie gebräuchlichen Raum-Zeit-Diagrammen, genannt Minkowski-Diagramme, zurück. Um 1900 herum befasste er sich mit der Geometrie der Zahlen, während er Spezialfälle von metrischen Räumen untersuchte, in denen je zwei Punkten eine nicht-negative Zahl, ihr Abstand, zugeordnet ist. Auch der Taxigeometrie liegt ein solcher metrischer Raum zugrunde, in dem die Punkte gerade den Schnittpunkten von horizontalen und vertikalen Geraden entsprechen ([2], S. 138).

Der wohl größte Vorteil der Taxigeometrie, gegenüber anderen nicht-euklidischen Geometrien, ist ihre Anschaulichkeit, wodurch der Zugang besonders leicht ist. Man kommt aber nicht ohne einige aufwendige Berechnungen aus, die mathematisch geschicktes Umformungen erfordern. Das sollte einen aber nicht abschrecken, denn es macht viel Spaß die Taxigeometrie zu erkunden und auf mathematische Entdeckungstour zu gehen. In ihr gibt es vieles, was anders, überraschend und verblüffend ist. Mit der Taxigeometrie eröffnet sich dem mathematisch interessierten Leser eine neue geometrische Welt, in der bekannte geometrische Objekte anders erscheinen, als man es aus der Schule gewohnt ist.

Der Name Taxigeometrie hat sich daraus ergeben, dass sich die Besonderheit dieser Geometrie dadurch veranschaulichen lässt, wenn man sich vorstellt, man würde in einem Taxi durch die Straßen einer Stadt fahren. Nimmt man zur Vereinfachung an, dass die Straßen ein gleichmäßiges Gitternetz bilden, so lässt sich die Situation mit einem karierten Papier beschreiben. Die Kästchenlinien stellen Straßen und die Kästchenkreuze stellen Straßenkreuzungen dar. Die Fläche innerhalb der Kästchenlinien steht dann für einen Wohnblock, einen Park oder ähnliches, welche von einem Taxi nicht befahren werden dürfen. Betrachtet man beispielsweise den Stadtplan von New York oder der Innenstadt von Mannheim, so wird die Anwendbarkeit einer solchen Geometrie schnell deutlich.

1.1 Punkte in der Taxigemoetrie

Formal lassen sich zwei unterschiedliche Formen der Taxigeometrie unterscheiden. Das ist zum einen die stetige Form, bei der jeder beliebige Punkt der Koordinatenebene betrachtet wird, und zum anderen die diskrete Form, bei der nur die Punkte auf den Gitterkreuzen betrachtet werden. Im stetigen Fall wird somit die Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ und im diskreten Fall die Koordinatenebene $\mathbb{Z}^2$ betrachtet. Da wir die Taxigeometrie zur mathematischen Beschreibung urbaner Gebiete verwenden möchten, wird bei geometrischen Fragestellungen hauptsächlich die diskrete Form betrachtet. Das heißt alle Punkte, die zur Beschreibung von Standorten verwendet werden, haben zunächst ganzzahlige Koordinaten. Für die dabei durchgeführten Berechnungen muss jedoch die stetige Form verwendet werden. In späteren Artikel werden gegebenenfalls Punkte betrachtet, deren Koordinaten nicht ganzzahlig sind. Unter Umständen entsteht so eine besonders spannende geometrische Situation.

1.2 Strecken in der Taxigeometrie

In der euklidischen Geometrie stellt eine Strecke $\overline{AB}$ die Menge aller Punkte dar, die auf der direkten und damit kürzesten Verbindungslinie zwischen zwei Punkten A und B liegen. Insbesondere existiert in der euklidischen Geometrie zu zwei Punkten A und B nur genau eine Strecke $\overline{AB}$. In Abbildung 1 sind neben der euklidischen Strecke $\overline{AB}$ (orangene Strecke) auch einige Strecken $\overline{AB}$ für die Taxigeometrie abgebildet (blaue und grüne Strecke). Es fällt sofort auf, dass es in der Taxigeometrie nicht nur eine einzige Strecke $\overline{AB}$ zwischen zwei Punkten A und B gibt. Dennoch haben alle Strecken $\overline{AB}$ dieselbe Länge, wie später deutlich wird.

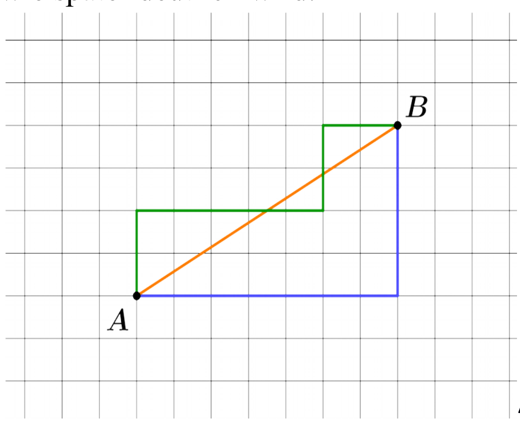

Abb. 1

Um zu untersuchen, wie hoch die Anzahl der Strecken $\overline{AB}$ zu zwei Punkten A und B ist, wird eine Unterscheidung der stetigen und diskreten Minkowskigeometrie notwendig. Im stetigen Fall existiert aufgrund der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen keine obere Schranke für die Anzahl der Strecken $\overline{AB}$. Betrachtet man nur die $\mathbb{Z}^2$ Ebene, also den diskreten Fall, so ist die Anzahl der Strecken $\overline{AB}$ abzählbar und es existiert eine obere Schranke. Die Anzahl der möglichen Strecken $\overline{AB}$ wird dabei durch zwei Parameter bestimmt. Der Abstand zwischen den x-Werten der Punkte A und B sowie der Abstand der y-Werte der beiden Punkte legen fest, wie viele Strecken $\overline{AB}$ existieren.

1.2.1 Anzahl der Strecken zwischen zwei Punkten in der Taxigeometrie

Bevor eine Formel zur Berechnung der Anzahl der Strecken $\overline{AB}$ bewiesen wird, sollen zunächst einige Überlegungen an einem einfach Beispiel angestellt werden. Kimi wohnt mit ihren Eltern in einer Wohnung K(1/3) in der Mannheimer Innenstadt. Ihre beste Freundin Helena wohnt ebenfalls in der Innenstadt Mannheims. Die Wohnung ihrer Eltern liegt bei H(5/6). Möchte nun Kimi auf kürzestem Weg zu Helena fahren, so muss sie an jeder Straßenkreuzung stets eine der Straßen wählen, die sie nicht weiter von Helena's Wohnort entfernen (vgl. Abb. 1). Sie hat daher an jeder Straßenkreuzung zwei Straßen zur Auswahl, die sie bis zur nächsten Straßenkreuzung nehmen kann. Bei der einen Straße verringert sich die Differenz der x-Koordinaten zwischen Kimi's aktuellem Standort S und Helena's Wohnort H, der Differenz der y-Werte bleibt gleich. Bei der anderen Straße verringert sich die Differenz der y-Werte zwischen Kimi's Standort S und Helena's Wohnort H, die Differenz der x-Werte bleibt hingegen gleich. In beiden Fällen verringert sich der Abstand zwischen den Punkte S und H. Die Frage nach der Gesamtanzahl der Wege zwischen Kimi's Wohnort K und Helena's Wohnort H ist somit ein kombinatorisches Problem. Der folgende Satz liefert für

die diskrete Minkowskigeometrie eine Formel zur Berechnung der Anzahl der Strecken $\overline{AB}$ zwischen zwei Punkten $A \in \mathbb{Z}^2$ und $B \in \mathbb{Z}^2$.
Um ihn zu beweisen wird auf das aus der Kombinatorik bekannte Pascal'sche Dreieck zurück gegriffen.
Wir wollen nun untersuchen, auf wie vielen Wegen Helena zu ihrer Freundin Kimi fahren kann ([1], S. 139-140). Es seien $A(x_A / y_A) \in \mathbb{Z}^2$ und $B(x_B / y_B) \in \mathbb{Z}^2$ zwei Punkte. Die Anzahl X der Strecken $\overline{AB}$ zwischen A und B lässt sich mit der folgenden Formel berechnen.

$$(1) \quad X = \frac{(|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)!}{(|x_A - x_B|)! \cdot (|y_A - y_B|)!}$$

Setzte den Punkt B als die Spitze des Pascal'schen Dreiecks und lege den Rest des Dreiecks so an, dass der Punkt A innerhalb liegt. Aufgrund der Symmetrie ist es dabei irrelevant, wie das Pascal'sche Dreieck hinter das von den Punkten A und B aufgespannte Rechteck gelegt wird. Es muss nur so angelegt werden, dass einer der beiden Punkt in der Spitze des Dreiecks und der andere Punkt innerhalb des Dreiecks liegt (vgl. Abbildung 2). Die Zahlen des Pascal'schen Dreiecks werden dabei an die Gitterkreuze geschrieben. Das Pascal'sche Dreieck sei so angelegt, dass der Punkt A in der Spitze und B innerhalb des Dreiecks liege. Die Zahlen an den Gitterkreuzen liefern nun die Anzahl der möglichen Wege, um von A zu dem jeweiligen Gitterkreuz zu gelangen, wenn man nur entlang der Kästchenlinien gehen darf und sich dabei niemals weiter entfernt. Der Punkt B liegt nun auf dem Schnitt der $|x_A - x_B|$ -ten und $|y_A - y_B|$ -ten Diagonalen. Es ist leicht einzusehen, dass $|x_A - x_B| + |y_A - y_B|$ die Zeile des Pascal'schen Dreiecks angibt, in der der Punkt B liegt. Dies einzusehen überlasse ich der Leserin oder dem Leser.

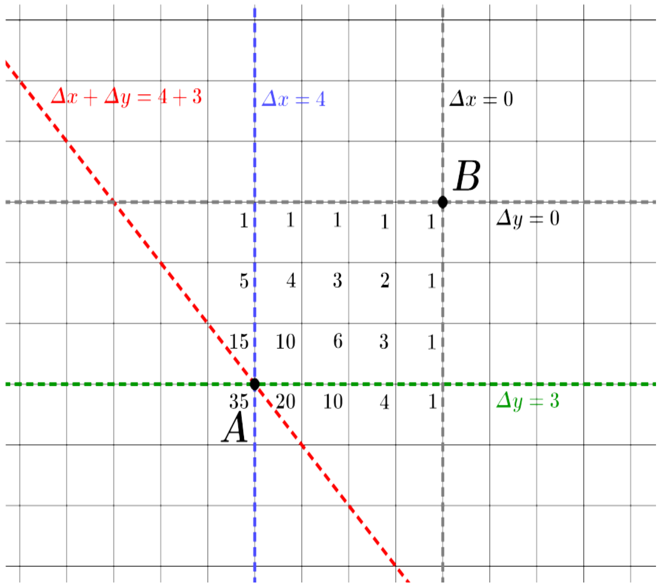

Abb. 2

Aus der Kombinatorik ist bekannt, dass sich der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ mittels des Pascal'schen Dreieck bestimmen lässt, wobei n für die jeweilige Zeile und k für eine der Diagonalen des Pascal'schen Dreiecks steht. Es gilt somit $n = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$ und $n = |y_A - y_B|$. Aus dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ lässt sich nun obige Gleichung herleiten.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$
$$= \frac{(|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)!}{(|x_A - x_B| + |y_A - y_B| - |y_A - y_B|)! \cdot |y_A - y_B|!}$$
$$= \frac{(|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)!}{(|x_A - x_B|)! \cdot (|y_A - y_B|)!}$$

Mit der Gleichung (1) kann nun auch berechnet werden, auf wie vielen kürzesten Wegen Kimi von ihrem Wohnort zu ihrer Freundin Helena gelangen kann. Es ist K(1/3) und H(5/6) und X sei die Anzahl der Strecken $\overline{KH}$.

$$X = \frac{(|1-5| + |3-6|)!}{(|1-5|)! \cdot (|3-6|)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5040}{144} = 35$$¿

Kimi hat also 35 verschiedene, kürzeste Wege, um von ihrem Wohnort zu Helena zu gelangen.

1.2.2 Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten in der Taxigeometrie

Wie in der Einleitung beschrieben, unterscheiden sich die euklidische Geometrie und die Taxigeometrie lediglich darin, wie zu zwei Punkten A und B die Strecke $\overline{AB}$ bestimmt wird. Während die euklidische Geometrie die direkte Luftline zwischen A und B verwendet wird, nutzt die Taxigeometrie die Summe aus vertikalem und horizontalem Abstand der beiden Punkte. Mathematisch bedeutet dies, dass die beiden Geometrien unterschiedliche Metriken verwenden ([4], S. 2, [5] S. 1ff). In der euklidischen Geometrie wird als Metrik der Satz des Pythagoras verwendet, um den Abstands zwischen zwei Punkten $A(y_A/x_A)\in\mathbb{R}^2$ und $B(y_B/x_B)\in\mathbb{R}^2$ zu ermitteln. Das heißt man berechnet

$$d_e(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}.$$

In der Taxigeometrie ist die Metrik zur Bestimmung des Abstands zwischen A und B eine andere. Der Abstand $d_T(A,B)$ zwischen zwei Punkten A und B ist somit die Summe der Beträge der Differenzen ihrer x- und y-Werte. Der Abstand wird daher wie folgt berechnet:

$$d_T(A,B)=|\Delta x|+|\Delta y|=|x_A-x_B|+|y_A-y_B|$$

Möchte nun Helena H(5/6) wissen, wie weit sie mit dem Fahrrad bis zu ihrer Freundin Kimi K(1/3) fahren muss, so kann dies folgendermaßen berechnet werden.

$$d_T(H,K)=|5-1|+|6-3|=|4|+|3|=4+3=7$$

Die Distanz zwischen den beiden Wohnorten von Helena und Kimi beträgt also in der Taxigeometrie 7 LE. Für einen Vogel wäre die Entfernung eine andere.

$$d_e(A,B)=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

Ein Vogel muss nur eine Strecke von 5 LE zwischen den beiden Wohnungen zurücklegen. Allgemein lässt sich für die Metriken der euklidischen Geometrie und Taxigeometrie folgende Ungleichung aufstellen. Dies einzusehen überlasse ich der Leserin oder dem Leser ([3], S. 4)

$$d_T(A,B)\geq d_e(A,B), \forall A,B\in\mathbb{R}^2$$

1.3 Mittelpunkt einer Strecke in der Taxigeometrie

Auf der Suche nach einer Wohnung W(x/y) in der Innenstadt von Mannheim überlegt der Student Tiago an welchem Ort diese idealerweise sein sollte. Hierfür sollte der Weg zur Universität U(3/2) und zur Nachhilfeschule N(11/14), in der er arbeitet, möglichst gleich lang sein. Darüber hinaus sucht Tiago nach dem Ort, der die kürzeste Distanz zur Universität und Nachhilfeschule hat. Mathematisch soll also $d_T(W,U)$ minimal sein und es muss gelten $d_T(W,U)=d_T(W,N)$. Es ist also der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{WU}$ gesucht.

Um den Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ mit A und B zu berechnen, muss man in der Taxigeometrie deutlich umfangreichere Berechnungen anstellen, als in der euklidischen Geometrie. In der euklidischen Geometrie gilt für den Mittelpunkt M der Strecke durch die Punkte $A(x_A/y_A)$ und $B(x_B/y_B)$ nach der Mittelpunktsformel $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}/\frac{y_A+y_B}{2}\right)$. In der euklidischen Geometrie wäre also der Punkt $M\left(\frac{3+11}{2}/\frac{2+14}{2}\right)=M(7/8)$ der ideale Standort für Tiago's Wohnung. Nun soll berechnet werden, welcher Standort in der Taxigeometrie ideal wäre.

$$(1)\quad \begin{aligned} & d_T(W,U)=d_T(W,N) \\ \Leftrightarrow\ & |x-3|+|y-2|=|x-11|+|y-14| \end{aligned}$$

Aufgrund des Betrags in der Metrik der Taxigeometrie müssen diverse Fallunterscheidungen vorgenommen werden ([3], S. 5).

$1.\,Fall: x<3$

a) Ist $y<2$, so gilt:

$$(1)\Leftrightarrow 3-x+2-y=11-x+14-y\Leftrightarrow 20=0$$

Der Fall 1.a) liefert einen Widerspruch und damit keine Lösung.

b) Ist $2 \leq y \leq 14$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow 3-x+y-2=11-x+14-y \Leftrightarrow y=12$

Der Fall 1.b) liefert somit eine Lösung.

c) Ist $y>14$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow 3-x+y-2=11-x+y-14 \Leftrightarrow 4=0$

Der Fall 1.c) liefert einen Widerspruch und damit keine Lösung.

$2. \mathit{Fall}: 3 \leq x \leq 11$

a) Ist $y<2$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow x-3+2-y=11-x+14-y \Leftrightarrow x=13>11$

Der Fall 2.a) liefert einen Widerspruch und damit keine Lösung.

b) Ist $2 \leq y \leq 14$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow x-3+y-2=11-x+14-y \Leftrightarrow y=15-x$

Der Fall 2.b) liefert somit eine Lösung.

c) Ist $y>14$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow x-3+y-2=11-x+y-14 \Leftrightarrow x=1<3$

Der Fall 2.c) liefert einen Widerspruch und damit keine Lösung.

$\mathit{Fall}\, 3: 11<x$

a) Ist $y<2$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow x-3+2-y=x-1+14-y \Leftrightarrow 2=0$

Der Fall 3.a) liefert einen Widerspruch und damit keine Lösung.

b) Ist $1 \leq y \leq 7$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow x-1+y-1=x-8x+7-y \Leftrightarrow y=4$

Der Fall 3.b) liefert somit eine Lösung.

c) Ist $y>7$, so gilt:

$(1) \Leftrightarrow x-1+y-1=x-8+y-7 \Leftrightarrow 20=0$

Der Fall 3.c) liefert einen Widerspruch und damit keine Lösung.

Es ergibt sich somit als Lösung der Gleichung

$d_T(W,U)=d_T(W,N)$:

$y=12$, für $x<3$

$y=15-x$, für $3 \leq x \leq 11$

$y=4$, für $11<x$

Die Punkte, für die gilt $d_T(W,U)=d_T(W,N)$, sind in der Abbildung 3 dargestellt. Möchte Tiago die potenziellen Wohnungstandorte W(x/y) auswählen, an denen der Abstand zur Universität und zur Nachhilfeschule möglichst gering ist, so kommen nur diejenigen in Fragen, für die gilt $3 \leq x \leq 11$ und $2 \leq y \leq 14$. Wie man leicht einsehen kann, haben alle anderen Standorte einen größeren Abstand zur Universität und zur Nachhilfeschule. Vergleicht man diese Punkte mit dem Streckenmittelpunkte M der euklidischen Geometrie, für den gilt $d_E(M,U)=d_E(M,N)$, so wird der Unterschied zwischen den beiden Geometrien erneut deutlich. Während in der euklidischen Geometrie nur ein einziger idealer Standort für die Wohnung M(7/8) in Frage kommt, existieren in der Taxigeometrie mehrere mögliche Standorte, deren Abstand zu zwei bestimmten Punkten gleich ist. Im stetigen Fall sind es unendlich viele und im diskreten Fall nur endlich viele.

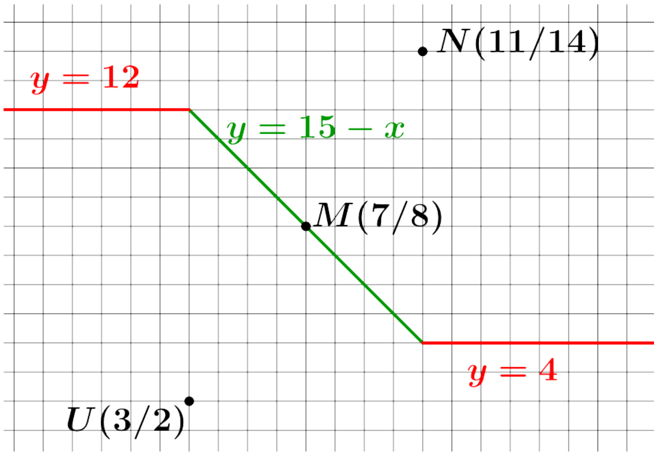

Abb. 3

Literaturverzeichnis

Alle Abbildungen wurden mit dem Programm GeoGebra Classic 5.0 erstellt.

[1] Martin Gardner: Geometrie mit Taxis, die Köpfe der Hydra und andere mathematische Spielereien, Birkhäuser Basel, Boston, Berlin (1997).

[2] Eugene F. Krause: Taxicab Geometry. An Adventure in Non-Euclidean Geometry, Addison-Wesley Publishing Company, California (1975).

[3] Chu Cam Tho und Tran Thi Ha Phuong: Didactic Reform: Organising Learning Projects on Distance and Applications in Taxicab Geometry for Students Specialising in Mathematics, in: VNU

Journal of Science: Education Research, Vol. 33 No. 4 (2017), S. 1-9.

[4] Rajendra Kunwar: Exploring Concepts and Applications of Taxicab Geometry, in: International Journal of Development Research Vol. 08, Issue, 11, (Nov. 2018), S. 24200-24205.

[5] Neil Greenspan: Taxicab Geometry as a Vehicle for the Journey Toward Enlightment, in: Humanistic Mathematics Network Journal, Issue 27, Article 5, (2004).