Hinweise nach Auswertung von Klausuren aus dem Jahr 2017

[auch mit Blick auf die externe Zweitkorrektur 2019]

Implementationsveranstaltungen

der Bezirksregierung Düsseldorf

November/Dezember 2018

Hinweise nach Auswertung von Klausuren aus dem Jahr 2017

- Operatoren und Erwartungen (insb. „rechnerisch“)
- Kontrolllösungen
- Modelllösung
- Bewertung

Operatoren und Erwartungen (1)

„Rundungen“ und „exakte Lösungen“

Sofern in der Aufgabenstellung keine expliziten Vorgaben gemacht werden oder aus der Aufgabenstellung die Erwartung einer exakten Vorgehensweise hervorgeht, sind **sinnvoll* gerundete Werte grundsätzlich bei allen Operatoren zulässig,**

auch wenn in der Modelllösung als Korrekturerleichterung exakte Werte angegeben werden.

Beispiel für explizite Vorgaben:

„*Geben Sie das Ergebnis gerundet auf drei Nachkommastellen an.*“

*das was im Unterricht als sinnvolle Rundung behandelt wurde.
[=> Urteils- und Fachkompetenz der Lehrkraft]

Operatoren und Erwartungen (1)

„Rundungen“ und „exakte Lösungen“ (mit GTR)

In der Regel werden im Prüfungsteil B (GTR) somit sinnvoll gerundete Werte erwartet.

In offensichtlichen Fällen

[z.B. $\frac{2}{3}$ als Wahrscheinlichkeit für zwei von drei Kugeln einer Urne
oder $\pm\sqrt{2}$ als Lösungen von $x^2 = 2$]

sollte die Lehrkraft konsistent zum vorherigen Unterricht und den Erwartungen in diesem Unterricht entscheiden, inwieweit sie exakte Werte erwartet.

=> Urteils- und Fachkompetenz der Lehrkraft

Operatoren und Erwartungen (1)

„Rundungen“ und „exakte Lösungen“ (mit GTR)

Bei den Operatoren „rechnerisch bestimmen“, „berechnen“, … werden in der Regel <u>keine exakten</u> Werte erwartet.

„Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen von f und g.“ => i.d.R. keine exakten Werte

Bei den Operatoren „nachweisen“ oder „zeigen“ werden exakte Werte erwartet, ***wenn*** dies aus dem geforderten Nachweis hervorgeht.

Beispiele für Nachweise, die i.A. eine exakte Vorgehensweise erfordern:

„Weisen Sie nach, dass der Punkt $\left(\ln(2) \mid \frac{1}{3}e^{-2}\right)$ auf dem Graphen liegt/der Hochpunkt ist“

„Zeigen Sie, dass die Hochpunkte der Kurvenschar auf dem Graphen der Funktion *w* mit *w*(*x*)= … liegen.“

Beispiel für einen Nachweis, der i.A. keine exakten Werte verlangt:

„Weisen Sie nach, dass ein Hochpunkt existiert.“

Operatoren und Erwartungen (2)

„Entscheiden“, „Angeben“

Bei den Operatoren „entscheiden“ und „angeben“ ist **keine Begründung** oder Rechnung erforderlich, sofern sie nicht durch einen ergänzenden Operator gefordert wird. [aus: Übersicht über die Operatoren]

ohne Begründung:

(1) *Bestimmen Sie alle Werte von* $k \in \mathbb{R}$*, für die* $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *gilt.*

(2) *Geben Sie jeweils an, für welche* $k \geq 0$ *die Beziehungen* $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x < 0$ *bzw.* $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ *gelten.*

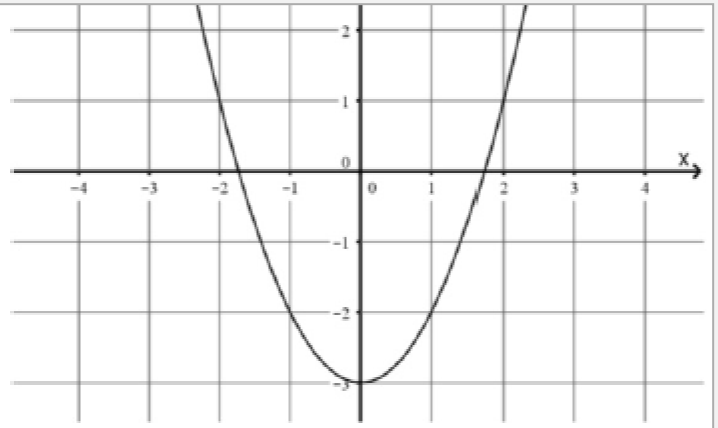

Abbildung 2

mit Begründung:

a) *Entscheiden Sie anhand der Abbildung, welchen Grad die ganzrationale Funktion f mindestens haben muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung.*

Operatoren und Erwartungen (3)

„angeben“ vs. „bestimmen“ vs. „rechnerisch bestimmen“

„Geben Sie an“:

Objekte, Sachverhalte, […], Daten ohne nähere Erläuterungen, Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen.
[aus: Übersicht über die Operatoren]

„Bestimmen Sie“:

Zusammenhänge bzw. Lösungswege aufzeigen, das Vorgehen darstellen und Ergebnisse formulieren.
[aus: Übersicht über die Operatoren]

„Bestimmen Sie rechnerisch“:

Zusätzlich werden Ansatz und Berechnung dargestellt. Dabei sind weitere Lösungsschritte zu dokumentieren.

Eine Argumentation, die sich auf das Ablesen von Werten und Zusammenhänge am Funktionsgraphen oder auf die Verwendung von Rechnerfunktionen zur Analyse einer Funktion stützt (z.B. Angabe von Maxima), erfüllt nicht die Erwartungen.

[aus: Hinweise zur Dokumentation... bei Einsatz d. GTR]

=> Kein grundsätzliches Verbot des GTR !

GTR darf (bis auf obige Einschränkungen) für Berechnungen genutzt werden.

Operatoren und Erwartungen (3)

„bestimmen“ vs. „rechnerisch bestimmen“

Bestimmen Sie: (im Prüfungsteil B)

Der GTR kann **mit allen** Funktionen umfänglich eingesetzt werden.

Beispiele:

⇒ Extrem- und Wendepunkte können z.B. im Grafikmenü (z.B. Analyse-funktion) direkt bestimmt werden.

⇒ Bestimmte Integrale können ohne Angabe einer Stammfunktion direkt ermittelt werden.

⇒ Funktionalitäten des GTR können kombiniert werden.

z.B.: $\text{nsolve}\left(\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = 12\,,\ x\right)$

Bestimmen Sie rechnerisch: (Teil B)

Explizite Anforderungen*:*

Für Extrem- und Wendestellen:

- Angabe des Ableitungsterms

*- notwendige **<u>u</u>**. hinreichende Bedingung*

Für Integrale:

- Angabe einer Stammfunktion

- Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Zwei mögliche Darstellungen:

$$\int_1^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^3 = \frac{32}{3}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x\,;\qquad \int_1^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = \frac{32}{3}$$

[aus: Hinweise zur Dokumentation...]

Kein grundsätzliches Verbot des GTR !

Operatoren und Erwartungen (3)

„Bestimme“ vs. „Bestimme rechnerisch“

Weitere explizite Beispiele für sinnvolle GTR-Befehle im Prüfungsteil B:

⇒ Gleichungslöser des GTR dürfen im Prüfungsteil B bei allen Operatoren grundsätzlich eingesetzt werden.
[Dies gilt unabhängig davon, ob sie eine oder mehrere Lösungen einer Gleichung oder eines LGS liefern.]

⇒ Gleiches gilt für Befehle zum Logarithmus, Sinus, Kosinus, Potenzen, Wurzeln, …

Händische Rechnungen (z.B. p-q-Formel) werden ggf. im Prüfungsteil A verlangt.

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 1)
„Geben Sie an“ vs. „Bestimmen“ (ohne rechnerisch)

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$

Geben Sie die maximal mögliche Anzahl der Extrempunkte des Graphen von f an.

Der Graph von f besitzt maximal drei Extremstellen.

Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f an.

$H_1\left(20 \mid \frac{11584}{75}\right)$ $H_2\left(200 \mid \frac{580}{3}\right)$

$T\left(100 \mid \frac{320}{3}\right)$

Geben Sie begründet die maximal mögliche Anzahl der Extrempunkte des Graphen von f an.

Da f eine Funktion vierten Grades ist, besitzt der Graph maximal drei Extremstellen.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

Die graphische Analyse mittels GTR liefert in den Intervallen [0; 50]; [50; 150] und [150; 250] die Hoch-punkte $H_1\left(20 \mid \frac{11584}{75}\right)$ u. $H_2\left(200 \mid \frac{580}{3}\right)$

sowie den Tiefpunkt $T\left(100 \mid \frac{320}{3}\right)$.

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 1)
„Bestimme“ vs. „Bestimme rechnerisch“

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$

Geben Sie begründet die maximal mögliche Anzahl der Extrempunkte des Graphen von f an.

Da f eine Funktion vierten Grades ist, besitzt der Graph maximal drei Extremstellen.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

Die graphische Analyse des GTR liefert in den Intervallen [0;50]; [50;150] und [150;250] die Hochpunkte: $H_1\left(20 \mid \frac{11584}{75}\right)$ u. $H_2\left(200 \mid \frac{580}{3}\right)$

sowie den Tiefpunkt $T\left(100 \mid \frac{320}{3}\right)$.

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

$$f'(x) = -\frac{1}{250000} \cdot x^3 + \frac{4}{3125} \cdot x^2 - \frac{13}{125} \cdot x + \frac{8}{5}.$$

$$f''(x) = -\frac{3}{250000}x^2 + \frac{8}{3125}x - \frac{13}{125}.$$

Mögliche Extremstellen:

$$f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = 20 \vee x_E = 100 \vee x_E = 200.$$

Es gilt: $f''(20) = -\frac{36}{625} < 0,\quad f''(100) = \frac{4}{125} > 0,\quad f''(200) = -\frac{9}{125} < 0$

$$f(20) = \frac{11584}{75} \approx 154{,}45; \quad f(100) = \frac{580}{3} \approx 193{,}33; \quad f(200) = \frac{320}{3} \approx 106{,}67$$

Es gibt die Hochpunkte $H_1\left(20 \mid \frac{11584}{75}\right)$ und $H_2\left(200 \mid \frac{580}{3}\right)$

sowie den Tiefpunkt $T\left(100 \mid \frac{320}{3}\right)$.

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 2) „angeben"

Bezirksregierung

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Geben Sie den Inhalt der Fläche an, die der Graph von f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.

Minimallösung:

- ~~gleich Null setzen~~
- ~~p-q-Formel~~
- ~~Integral~~
- ~~Stammfunktion~~
- ~~Hauptsatz der Integralrechnung~~
- ~~Werte ausrechnen~~
- **Ergebnis**

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 2)
„bestimmen“

Gegeben ist die in $I\!R$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.

Minimallösung:

- **Prosatext: Nullstellen mit GTR, Öffnung der Parabel**
- ~~gleich Null setzen~~
- ~~p-q-Formel~~
- **Integral**
- ~~Stammfunktion~~
- ~~Hauptsatz der Integralrechnung~~
- ~~Werte ausrechnen~~
- **Ergebnis**

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 2)
„ rechnerisch bestimmen“

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.

Minimallösung:

- **gleich Null setzen**
- ~~p-q-Formel~~
- **Integral**
- **Stammfunktion**
- **Hauptsatz der Integralrechnung**
- ~~Werte ausrechnen~~
- **Ergebnis**

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 3)

Bezirksregierung

Eine Schülerin verwendet die auf $I\!R$ definierte Funktion h mit der Funktionsgleichung

Abbildung 1

$$h(t) = -\frac{80}{27} \cdot t^3 + \frac{40}{3} \cdot t^2 + 130$$

für $0 \le t \le 3{,}5$, um den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn im Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 23.10.2016, 12:00 Uhr zu modellieren.

Geben Sie an

~~Bestimmen Sie rechnerisch~~, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140 cm und 150 cm lag.

Der Wasserstand lag im betrachteten Zeitraum insgesamt ca. 0,5 Tage zwischen 140 cm und 150 cm.

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 3)

Eine Schülerin verwendet die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit der Funktionsgleichung

Abbildung 1

$$h(t) = -\frac{80}{27} \cdot t^3 + \frac{40}{3} \cdot t^2 + 130$$

für $0 \le t \le 3{,}5$, um den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn im Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 23.10.2016, 12:00 Uhr zu modellieren.

Bestimmen Sie ~~rechnerisch,~~ wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140 cm und 150 cm lag.

Am Graphen kann man ablesen, dass im betrachteten Bereich für ungefähr $0{,}98 \le t \le 1{,}5$ $140 \le h(t) \le 150$ für gilt.

Damit lag der Wasserstand im betrachteten Zeitraum insgesamt ca. 0,5 Tage zwischen 140 cm und 150 cm

[Alternativ könnten die Stellen für $h(t) = 140$ und $h(t) = 150$ bestimmt und unter Verweis auf den Graphen das Intervall direkt angegeben werden.]

Operatoren und Erwartungen (Bsp. 3)

Abbildung 1

Eine Schülerin verwendet die auf $I\!R$ definierte Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(t) = -\frac{80}{27} \cdot t^3 + \frac{40}{3} \cdot t^2 + 130$$

für $0 \leq t \leq 3{,}5$, um den Wasserstand des Rheins an der Messstelle in Bonn im Zeitraum vom 20.10.2016, 0:00 Uhr, bis zum 23.10.2016, 12:00 Uhr zu modellieren.

Bestimmen Sie rechnerisch, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140 cm und 150 cm lag.

Gesucht werden die Intervalle für $0 \leq t \leq 3{,}5$ mit $140 \leq h(t) \leq 150$.

Für $h(t) = 140$ liefert der GTR $t \approx -0{,}80$ oder $\mathbf{t \approx 0{,}98}$ oder $t \approx 4{,}32$
Aus $h(t) = 150$ liefert der GTR $t \approx -1{,}10$ oder $\mathbf{t = 1{,}5}$ oder $t \approx 4{,}10$.

Mit $0 \leq t \leq 3{,}5$ und $h(0) = 130$; $h(1{,}2) \approx 144$ und $h(2) \approx 160$ ergibt sich:
$40 \leq h(t) \leq 150$ für ungefähr $0{,}98 \leq t \leq 1{,}5$.

Damit lag der Wasserstand im betrachteten Zeitraum insgesamt
ca. 1,5 – 0,98 = 0,52 [Tage] zwischen 140 cm und 150 cm.

Operatoren und Erwartungen: Abitur 2017
Zeitverlust durch fehlenden GTR-Einsatz

Bezirksregierung

Abitur 2017; GK B1 a)(4): Der Temperaturverlauf $f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$

Der Zeitabschnitt, in dem die Flüssigkeit im Produktionsprozess konstant bei 77 °C gehalten wird, entspricht im Modell dem Intervall, in dem die Funktion f mindestens diese Temperatur liefert.

(4) *Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen dieser Zeitabschnitt beginnt und endet.*

$$(4) \quad f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 77 \quad | -23$$

$$20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 54 \quad | : 20$$

$$t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 2{,}7 \quad | :$$

Lösung fehlt

Leider kein GTR-Einsatz!

=> Zeitverlust

Operatoren und Erwartungen: Abitur 2017
Zeitverlust durch fehlenden GTR-Einsatz

Bezirksregierung

Abitur 2017; GK B1 a)(4): Der Temperaturverlauf $f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$

Der Zeitabschnitt, in dem die Flüssigkeit im Produktionsprozess konstant bei 77 °C gehalten wird, entspricht im Modell dem Intervall, in dem die Funktion *f* mindestens diese Temperatur liefert.

(4) *Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen dieser Zeitabschnitt beginnt und endet.*

Ansatz richtig

$77 = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} \quad | -23$

$54 = 20t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} \quad | : 20$

$\frac{27}{10} = t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t} \quad | (\ln)$

$\ln\left(\frac{27}{10}\right) = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \cdot t \quad | : (\ln(\frac{1}{10}))$

Leider kein GTR-Einsatz!

=> Zeitverlust!

Operatoren und Erwartungen: Abitur 2017
Zeitverlust durch fehlenden GTR-Einsatz

Abitur 2017; GK B1 a)(4): Der Temperaturverlauf $f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$

Der Zeitabschnitt, in dem die Flüssigkeit im Produktionsprozess konstant bei 77 °C gehalten wird, entspricht im Modell dem Intervall, in dem die Funktion *f* mindestens diese Temperatur liefert.

(4) *Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen dieser Zeitabschnitt beginnt und endet.*

Leider kein GTR-Einsatz

=> Zeitverlust!

$f(t) = 77°C$

$77 = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10}t} \quad | -23$

$54 = 20t \cdot e^{-\frac{1}{10}t} \quad | :20$

f

$0{,}135 = t \cdot e^{-\frac{1}{10}t} \quad | \ln$

$\ln 0{,}135 = t \cdot -\frac{1}{10}t$

f falsche Umformung

$\ln 0{,}135 = -\frac{1}{10}t \quad | : -\frac{1}{10}$

$\frac{\ln 0{,}135}{-\frac{1}{10}} = t$

$t = \underline{20}$ (v)

Operatoren und Erwartungen: Abitur 2017
Zeitverlust durch fehlenden GTR-Einsatz

Bezirksregierung

Abitur 2017; LK B1 b)(1): $f_a(x) = x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $a > 0$.

Im Folgenden sei $a = 0{,}2$ und $G_{0,2}$ sei der Graph der Funktion $f_{0,2}$.

b) (1) Für jeden Wert von b mit $0 \le b \le 100$ sind die Punkte $A(0\,|\,0)$ und $B(b\,|\,0)$ sowie der Punkt C gegeben. C hat die x-Koordinate b und liegt auf dem Graphen $G_{0,2}$.

Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.

Modelllösung: *(zzgl. Antwortsatz)*

Der Flächeninhalt des Dreiecks lässt sich hier in Abhängigkeit von b durch die Funktion A mit $A(b) = 0{,}5 \cdot b \cdot f_{0,2}(b)$ berechnen.

Der Taschenrechner liefert im gegebenen Intervall (z. B. durch graphische Analyse) den globalen Hochpunkt $H(15\,|\,84{,}02)$ des Graphen von A.

Operatoren und Erwartungen: Abitur 2017
Zeitverlust durch fehlenden GTR-Einsatz

Abitur 2017; LK B1 b)(1): $f_a(x) = x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $a > 0$.

***Schülerlösung**: Die richtige Zielfunktion…*

(1) $b \rightarrow \quad 0 \leq b \leq 100$

$A(0|0) \qquad B(b|0) \qquad C(b|G_{0{,}2}(b))$

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ ✓

$g = b \qquad h = b^2 \cdot e^{-0{,}2b}$

$A(b) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (b^2 \cdot e^{-0{,}2b})$ ✓

$= \frac{1}{2} \cdot (b^3 \cdot e^{-0{,}2b})$

$= \frac{1}{2} b^3 \cdot e^{-0{,}2b}$ ✓

Operatoren und Erwartungen: Abitur 2017
Zeitverlust durch fehlenden GTR-Einsatz

Fortsetzung leider ohne GTR:

händische Ableitung…bis p-q-Formel und 2. Abl. …

$$(b) = 1{,}5b^2 \cdot e^{-0{,}2b} + \left(\tfrac{1}{2}b^3\right) \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2b}$$
$$= 1{,}5b^2 \cdot e^{-0{,}2b} + (-0{,}1b^3) \cdot e^{-0{,}2b} \quad ✓$$
$$= (1{,}5b^2 - 0{,}1b^3) \cdot e^{-0{,}2b}$$
$$= (-0{,}1b^3 + 1{,}5b^2) \cdot e^{-0{,}2b} \quad ✓$$

$$(b) = 0 \quad ✓$$
$$= (-0{,}1b^3 + 1{,}5b^2) \cdot e^{-0{,}2b} \quad | : e^{-0{,}2b} \quad ✓$$
$$= -0{,}1b^3 + 1{,}5b^2 \quad ✓$$
$$= -0{,}1b(b^2 - 15b) \quad | b=0$$
$$= b^2 - 15b \quad ✓ \quad | pq\text{-F.}$$

$$\text{-q-Formel:} \quad b = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$, = -\frac{(-15)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}}$$
$$1 = \frac{15}{2} + \sqrt{\frac{225}{4}} = 15$$
$$2 = \frac{15}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}} = 0$$
$$1 = 15 \quad b_2 = 0 \quad ✓$$

$$(b) = (-0{,}3b^2 + 3b) \cdot e^{-0{,}2b} + (-0{,}1b^3 + 1{,}5b^2) \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2b} \quad ✓$$
$$= (-0{,}3b^2 + 3b) \cdot e^{-0{,}2b} + (0{,}02b^3 - 0{,}3b^2) \cdot e^{-0{,}2b}$$
$$= (0{,}02b^3 - 0{,}6b^2 + 3b) \cdot e^{-0{,}2b} \quad ✓$$

$$) = 0$$
$$) = -1{,}12 < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt} \quad ✓$$

=> Zeitverlust!

Ein weiteres Beispiel

ohne GTR zu dieser Aufgabe:

b) (1) $f_{0,2}(x) = x^2 \cdot e^{-0,2x}$ $\quad 0 \le b \le 100$

$A(0|0) \quad B(b|0) \quad C(b|y)$

$A = \frac{u \cdot v}{2}$

$f(u) = u^2 \cdot e^{-0,2u}$

$A(u) = \frac{(u^2 \cdot e^{-0,2u}) \cdot u}{2}$

$= \frac{u^3 \cdot e^{-0,2u}}{2}$ ✓

$A'(u) = \frac{1}{2}\left(3u^2 \cdot e^{-0,2u} + u^3 \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2u}\right)$ ✓

$= \frac{1}{2} e^{-0,2u}(3u^2 - 0,2u^3)$ ✓

$A''(u) = -0,1e^{-0,2u}(3u^2 - 0,2u^3) + \frac{1}{2}e^{-0,2u} \cdot (6u - 0,6u^2)$

$= e^{-0,2u}\left(-0,1 \cdot (3u^2 - 0,2u^3) + \frac{1}{2} \cdot (6u - 0,6u^2)\right)$

$= e^{-0,2u}(-0,3u^2 + 0,02u^3 + 3u - 0,3u^2)$

$= e^{-0,2u}(0,02u^3 - 0,6u^2 + 3u)$ ✓

HP bestimmen: notw. Bed: $A'(u) = 0$

$0 = \frac{1}{2} e^{-0,2u}(3u^2 - 0,2u^3)$

$\Rightarrow 0 \neq \frac{1}{2} \cdot e^{-0,2u} \wedge 0 = 3u^2 - 0,2u^3$

$= u^2(3 - 0,2u)$

$0 = u \quad \wedge \quad 3 - 0,2u = 0 \quad | + 0,2u$ ✓

$3 = 0,2u \quad | : 0,2$

$15 = u$ ✓

hinr. Bed: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$A''(0) = 0 \rightarrow$ ... $A''(-1) = -3,27$

Vorzeichenwechsel $A''(1) = 2,23$

von − nach +

$A''(15) = 52,87 > 0$ TP

Arbeitsphase:

Arbeitsauftrag:

Setzen Sie sich mit den Schülerlösungen aus dem Jahr 2017 ggf. inklusive der Korrekturanmerkungen (ggf. 1. und 2. Korrektor) auseinander und entscheiden Sie sich für eine Punktzuweisung.

Vergleichen Sie Ihre Bewertung mit der Ihres Nachbarn und tauschen Sie sich über Ihre Bewertungsentscheidungen aus.

Material: Beispiele von Schülerbearbeitungen

„Kontrolllösung“ vs. „Mögliche Lösung“

Die Formulierung gibt Hinweise, ob die Lösung zu erwarten ist:

- Als „Kontrolllösung“ bzw. „Zur Kontrolle“ werden Ergebnisse oder Informationen angegeben, die die Schülerinnen und Schüler (sofern sie keine Fehler machen) voraussichtlich erhalten werden.
- „Mögliche Lösungen“ sind richtige Ergebnisse, mit denen weitergearbeitet werden kann, die aber in der Regel nicht mit dem kanonischen Vorgehen erlangt werden.

Es gilt: $O(0|0|0)$; $A(6|4|-2)$; $B(0|16|-8)$

b) (1) *Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene H auf, die die Punkte O, A und B enthält.*

[Mögliche Parametergleichung: $H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; (r, s \in \mathbb{R})$]

(Abitur 2017, GK, B3)

„Kontrolllösung“ : Rundung

In einigen Fällen wird die Kontrolllösung mit weniger Nachkommastellen angegeben als in der Aufgabe verlangt.

Beispiele:

b) (1) Die Funktion f schließt im ersten Quadranten mit der x- und der y-Achse die Fläche A_f ein.

Bestimmen Sie die Größe der Fläche A_f auf drei Nachkommastellen gerundet.

[Kontrolllösung mit zwei Nachkommastellen: $A_f \approx 0,09$ [FE].]

(Abitur 2018, GK, NT B1)

Modelllösung (1)

Die Modelllösung ist **keine** Musterlösung!

„Die jeweilige Modelllösung stellt **eine mögliche** Lösung bzw. Lösungsskizze dar.“

Im Sinne der Modelllösung kann dies eine kurze/elegante **oder** auch eine voraussichtlich zu erwartende Vorgehensweise sein.

„Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge **muss nicht identisch** mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet. (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).“

⇒ **Urteils- und Fachkompetenz der Lehrkraft**

Hinweise auf alternative Lösungswege gibt es nur in Ausnahmefällen.

[Zur Abschätzung des Aufwands wird immer eine voraussichtlich zu erwartende Vorgehensweise genutzt, auch wenn in der Modelllösung eine kurze Lösung gewählt wird.]

Modelllösung (1) Beispiel 1

Aufgabenstellung	Modelllösung
Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f genau einen Extrempunkt hat. Vergleichen Sie die zu diesem Punkt gehörende Temperatur mit den angegebenen Messwerten.	Es gilt: $f'(t) = 20\,(1 - \ 1/10\ t)\ e^{-1/10t}$ **Notwendige Bedingung:** Ist t_E eine Extremstelle, dann gilt $f'(t_E) = 0$. Da $20\ e^{-1/10t} \neq 0$ gilt, genügt die Betrachtung von $(1 - 1/10t) = 0$. Es folgt, dass nur die Stelle $t_E=10$ in Frage kommt. **Hinreichende Bedingung:** Da $f'(10)=0$, $f'(t)>0$ für $t<10$ und $f'(t)<0$ für $t>10$, handelt es sich um eine Extremstelle mit dem Funktionswert $f(10)=96{,}6$. Die Temperatur von 96,6 °C ist deutlich größer als die Messwerte.

3	(2) bestimmt die erste Ableitung.	4			
4	(2) zeigt rechnerisch (mit einer notwendigen und hinreichenden Bedingung), dass der Graph von *f* genau einen Extrempunkt hat.	6			
5	(2) vergleicht den Funktionswert mit den angegebenen Messwerten.	2			

Modelllösung (1) Beispiel 2

Bezirksregierung

Aufgabenstellung	Modelllösung
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für große Werte von t und interpretieren Sie diesen Verlauf im Sachzusammenhang.	Für große Werte von t nähert sich der Graph von f der Geraden mit der Gleichung y = 23 an. Die Temperatur der Flüssigkeit nähert sich mit der Zeit 23 °C an.

6	(3) beschreibt den Verlauf des Graphen für große Werte von *t* und interpretiert den Verlauf im Sachzusammenhang.	3			

Modelllösung (2)

„Nicht erwartete Angaben: […]“

Angaben, die für die fachliche Vollständigkeit und Richtigkeit erforderlich sind oder die eine Korrekturhilfe darstellen, die aber von den Schülerinnen und Schülern **nicht erwartet** werden, werden in der Modelllösung in eckigen Klammern „[…]“ dargestellt.

(1) Es gilt

$$h'(t) = -0{,}065 \cdot d \cdot e^{-0{,}065 \cdot t}.$$

Damit lässt sich das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen:

$$h(20) = 77 \quad \Leftrightarrow \quad c + d \cdot \mathrm{e}^{-0{,}065 \cdot 20} = 77 \quad \left[\Leftrightarrow c + \mathrm{e}^{-1{,}3} \cdot d = 77\right],$$

$$h'(20) = -3{,}5 \Leftrightarrow -0{,}065 d \cdot \mathrm{e}^{-0{,}065 \cdot 20} = -3{,}5 \left[\Leftrightarrow d = \frac{3{,}5}{0{,}065 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}3}}\right].$$

Mithilfe des GTR erhält man $c \approx 23{,}15$ und $d \approx 197{,}58$.

(2017,GK B1, b)(1))

Modellösung (2)

„Nicht erwartete Angaben: […]“

Angaben, die für die fachliche Vollständigkeit und Richtigkeit erforderlich sind oder die eine Korrekturhilfe darstellen, die aber von den Schülerinnen und Schülern **nicht erwartet** werden, werden in der Modelllösung in eckigen Klammern […] dargestellt.

$$h_{Prisma} = \left|\overline{DS}\right| = \sqrt{180}\left[= 6\sqrt{5} \approx 13{,}42\,[\mathrm{LE}]\right]. \text{ Es folgt: } V_{Prisma} = 1440\,[\mathrm{VE}].$$

(Abi 2017, LK B3, b)(2))

Bewertung

Vergabe von Punkten

- Die Anzahl der vergebenen Punkte sollte in Relation zur erbrachten Leistung stehen. (Punktabzüge pro Fehler erfüllen diese Bedingung im Allgemeinen nicht!)
- Betrachtungen von Teilkompetenzen/Teilleistungen können helfen den Grad der erbrachten Leistung einzuschätzen.
- Es werden nur ganzzahlige Anzahlen von Punkten vergeben. In der Folge sind i.d.R. sinnvolle Rundungen erforderlich.

Bewertung

Vergabe von Punkten: Beispiel 1 (Abitur 2017, GK, A1))

a) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2$.

(1) *Weisen Sie nach, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind.*

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.*

(2 + 4 Punkte)

Zu (2):

$$\int_{-2}^{0} \left(x^3 + 2x^2\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{2\cdot 2^3}{3}\right)$$

$$= -\frac{16}{4} + \frac{16}{3} = -\frac{64}{12} + \frac{48}{12} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

f, vertauscht

Der Inhalt der Fläche ist $1\frac{1}{3}$ FE groß.

Könnte man hier 4 von 4 Punkten geben?

Bewertung

Vergabe von Punkten: Beispiel 2 (Abitur 2017, GK, A1))

a) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2$.

(1) *Weisen Sie nach, dass* $x_1 = -2$ *und* $x_2 = 0$ *die einzigen Nullstellen von f sind.*

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.*

(2 + 4 Punkte)

Zu (2):

$$A = \int_{-2}^{0} \left(x^3 + 2x^2\right) dt = \underline{\left[3x^2 + 4x\right]_{-2}^{0}} = \underline{3 \cdot -2^2 + 4 \cdot -2}$$

$$= \underline{-12 - 8 = -4}$$

Ansatz richtig

Die Fläche ist -4.

Könnte man hier 2 von 4 Punkten geben?

Bewertung

Vergabe von Punkten: Beispiel 3

Abitur 2017; GK B1 a)(4): Der Temperaturverlauf $f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$

Der Zeitabschnitt, in dem die Flüssigkeit im Produktionsprozess konstant bei 77 °C gehalten wird, entspricht im Modell dem Intervall, in dem die Funktion *f* mindestens diese Temperatur liefert.

(4) *Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen dieser Zeitabschnitt beginnt und endet.*

Darstellung

(4) $f(t) = 77$

GTR: $\underset{t}{x} = 4{,}05 \lor \underset{t}{x} = 20{,}05$

Das Zeitintervall in dem die Temperatur mindesten 77° hat startet bei etwa ≈ 4,05 Minuten und endet bei etwa ≈ 20,05 Minuten.

Ist ein Hinweis auf den Verlauf des Graphen in Abb. 1 (direkt darunter) erforderlich?

=> Einschätzung der Fachlehrkraft unter Berücksichtigung der Absprachen und Vorgehensweisen im Unterricht.

Für Ihre Aufmerksamkeit vielen Dank!